MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3 :

1. Dokažte užitím definice limity posloupnosti aspoň jednu z limit (a důkaz podrobně napište):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

   Když jsme na cvičení dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ pro $a \in (1,\infty)$, lze už odtud snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $a \in (-1,1)$

nebo

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad (a \in R)$.

nebo

   c) Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. (Modifikace větu o četnících pro limitu ∞.)

   (A odtud opět lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(2-\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \cos n)$.)

3. Když jsme na cvičení dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (1,\infty)$, lze už odtud snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i pro $a \in (0,1)$?

4. Užití věty o „četnících":

   a) Spočítejte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2+n} \right)$.

   b) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots\dots \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1$.

A dobrovolně si můžete promyslet (aplikace věty o limitě monotónní posloupnosti):

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.

(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

b) Ukažte, že platí : je-li $0 \le a_n$, pak posloupnost $\{ \sum_{n=1}^{N} a_n \}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

c) Ukažte, že platí: Je-li $0 \le a_n \le b_n, n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{ \sum_{n=1}^{N} b_n \}$, pak také konverguje posloupnost $\{ \sum_{n=1}^{N} a_n \}$.

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti

(i) $\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n.2^n} \}$; (ii) $\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \}$.

(Návod: lze užít c) a to, co víte o geometrické řadě.)